

Beweis: Sei F eine Stammfkt. zu f

$$\Rightarrow \int_a^b f(y(t)) y'(t) dt \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \int_a^b \frac{d}{dt} F(y(t)) dt$$

$$\stackrel{\text{Hauptsatz}}{=} F(y(b)) - F(y(a))$$

$$(F \circ y) \Big|_a^b = F(y(b)) - F(y(a)) = \int_{y(a)}^{y(b)} f(x) dx.$$

□

Beispiele:

$$1.) \int_a^b f(x+c) dx \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \int_{a+c}^{b+c} f(t) dt$$

$$y(y) := y+c$$

$$2.) \int_a^b f\left(\frac{x}{c}\right) dx \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} c \int_{a/c}^{b/c} f(t) dt$$

$$y(y) := y/c$$

$$c \neq 0$$

3.) Sei $\gamma > 0$ und stetig diff'bar;

$$\int \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)} dx = ?$$

Mit $\varphi(x) := \ln \gamma(x)$ gilt

$$\varphi'(x) = \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)}$$

$$\Rightarrow \int \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)} dx = \ln \gamma(x) + c$$

4.)
$$\int \frac{y'(x)}{1+y^2(x)} dx = ?$$

mit $\varphi(x) := \arctan y(x)$ gilt

$$\varphi'(x) = \frac{y'(x)}{1+y^2(x)}$$

$$\Rightarrow \int \frac{y'(x)}{1+y^2(x)} dx = \arctan y(x) + c$$

Numerische Berechnung von Integralen

- explizite Auswertung von $\int_a^b f(x) dx$
via Stammfunktion schwierig oder
sogar unmöglich:

e^{x^2} hat natürlich eine Stammfkt.,
aber diese kann nicht mehr elementar
ausgedrückt werden! ∇

"elementar" $\hat{=}$ Polynome, Exponentialfktn,
Logarithmen, Trig. Fkten,
deren Umkehrfunktionen sowie
endliche Verkettungen und endliche
algebraische Verknüpfungen davon

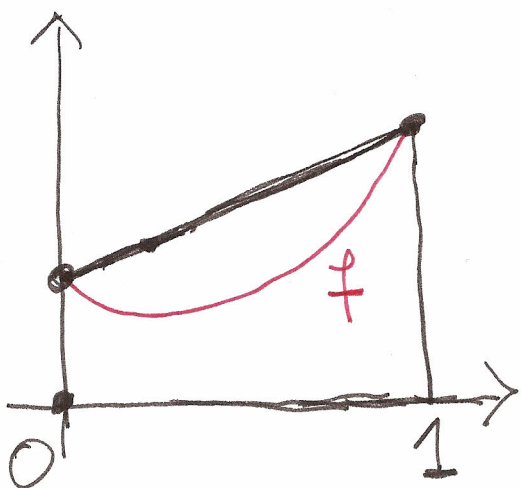
- die Integrationsregeln liefern aber
konvergente Approximationen

Satz 12.10: (Trapezregel = 1^{te} Approximation)

Sei $f \in C^2(\underbrace{[0,1]}_{\text{O.E.}}, \mathbb{R})$. Dann gibt

es ein $x_0 \in [0,1]$ mit

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} (f(0) + f(1)) - \frac{1}{12} f''(x_0)$$



$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (f(0) + f(1)) &= \\ \text{Trapez fläche,} \\ - \frac{1}{12} f''(x_0) &= \text{Korrektur-} \\ &\quad \text{term} \end{aligned}$$

Beweis: Sei $\varphi(x) := \frac{1}{2} x(1-x)$, $x \in [0,1]$.

Es gilt : $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$,

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2} - x \quad (\Rightarrow \varphi'(0) = \frac{1}{2} = -\varphi'(1)),$$

$$\int_0^1 \varphi(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{2} x dx - \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} =$$

$\frac{1}{12}$

$$\varphi''(x) \equiv -1$$

$$\Rightarrow: \int_0^1 \varphi(x) dx = - \int_0^1 \varphi''(x) \varphi(x) dx \stackrel{\text{part. Int.}}{=} -$$

$$\left(\varphi'(x) \varphi(x) \right) \Big|_0^1 + \int_0^1 \varphi'(x) \varphi'(x) dx =$$

$$\frac{1}{2} (\varphi(0) + \varphi(1)) + \int_0^1 \varphi'(x) \varphi'(x) dx;$$

beachte: $\int_0^1 \varphi'(x) \varphi'(x) dx \stackrel{\text{part. Int.}}{=}$

$$\left(\varphi(x) \varphi'(x) \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 \varphi(x) \varphi''(x) dx$$

$$\Rightarrow: \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} (f(0) + f(1)) - \int_0^1 f(x) f''(x) dx \quad \underline{\underline{\text{MWS}}}$$

$$\frac{1}{2} (f(0) + f(1)) - f''(x_0) \int_0^1 f(x) dx$$

□

Korollar: Sei $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ und

$$K := \sup \{ |f''(x)| : a \leq x \leq b \}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt mit $h := \frac{b-a}{n}$:

$$\int_a^b f(x) dx = \left\{ \frac{1}{2} f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a+k \cdot h) + \frac{1}{2} f(b) \right\} \cdot h + \text{"Rest"}$$

$$|\text{Rest}| \leq \frac{K}{12} (b-a) h^2 = \frac{K}{12} (b-a)^3 \frac{1}{n^2}.$$

($\rightarrow 0, n \rightarrow \infty$!)

Beweis: benutze 12.10 auf jedem

Intervall $[a + (k-1)h, a + kh]$, schätze

$|f''|$ durch K ab und summiere.



Zum Schluss

Uneigentliche Integrale

diese entstehen durch Grenzprozesse,

etwa:

$$\int_1^x \frac{dt}{t^2} = 1 - \frac{1}{x} \longrightarrow 1, x \rightarrow \infty$$

man wird also setzen: $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2} := 1$

allerdings ist etwas Vorsicht angebracht,
vgl. iii) in der Definition!

Def. 12.5

i) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $b > a$,

$b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Sei $f \in \mathcal{R}([a, \tilde{b}])$

für jedes $\tilde{b} < b$. Man setzt:

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\tilde{b} \uparrow b} \int_a^{\tilde{b}} f(x) dx,$$

falls „lim“ in $\mathbb{C}$ existiert.

ii) entsprechend für $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$,
 $a < \underline{b \in \mathbb{R}}$ und $f \in \mathcal{R}([\tilde{a}, b])$, $\tilde{a} > a$

iii) Seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$,
 $f \in \mathcal{R}([\tilde{a}, \tilde{b}])$ für alle $a < \tilde{a} < \tilde{b} < b$.



Man setzt:

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

Falls für ein $c \in (a, b)$ die beiden uneigentlichen Integrale rechts existieren (dann auch für alle c !)

Bem: 1.) $\int_{-\infty}^{\infty} x \, dx$ existiert nicht, da ^{gemäß iii)}

(mit $c = 0$) $\int_0^t x \, dx = \frac{1}{2} t^2 \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty,$

$\int_t^0 x \, dx = -\frac{1}{2} t^2 \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} -\infty$

aber: $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t x \, dx = 0 \quad \nabla$

Hat man allerdings gemäß iii) die Existenz von $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx$ bewiesen, so gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t f(x) \, dx.$$

2.) Ein uneigentliches Integral heißt

absolut konvergent, falls auch

$$\int_a^b |f(x)| dx \quad (\text{in } \mathbb{R}!) \text{ existiert.}$$

Bsple: 1.)

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ existiert} \iff p > 1$$

denn:

$$\int_1^a \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \ln a, & p = 1, \\ \frac{1}{p-1} (1 - a^{1-p}), & p \neq 1 \end{cases}$$

und die r. S. hat einen Limes bei $a \rightarrow \infty$

genau nur für $p > 1$.

2.) entsprechend:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} \text{ existiert} \iff p < 1$$

3.) 1.) + 2.) $\Rightarrow$: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ existiert für kein $p \in \mathbb{R}$

$$4.) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \dots + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \dots =$$

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} (-\arctan a) + \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctan b) = \pi$$

Zwischen Reihen und uneigentlichen Integralen besteht eine große Analogie, z.B.

Satz 12.11 (Majorantenkriterium):

Seien $\mathbb{R} \ni a < b \leq \infty$, f, g

Seien Regelfunktionen auf $[a, \tilde{b}]$

für alle $\tilde{b} < b$. Es gelte

$$|f| \leq g.$$

Existiert dann $\int_a^b g(x) dx$, so auch

$\int_a^b f(x) dx$. Das Integral

-465-

konvergiert sogar absolut.

(analog für andere Grenzübergänge)

Beweis: Sei $F: [a, b) \rightarrow \mathbb{C}$, $F(x) := \int_a^x f(t) dt$

$$\Rightarrow |F(x) - F(y)| = \left| \int_y^x f(t) dt \right| \leq \quad \text{wieso?!}$$

$$\left| \int_y^x g(t) dt \right| = |G(x) - G(y)|,$$

$$G(x) := \int_a^x g(t) dt. \quad \text{Da } \lim_{x \rightarrow b} G(x)$$

existiert, hat man die Cauchy-Bdg. für G,
nach obiger Abschätzung dann auch für F.
(vgl. Satz 9.13) $\square$

Eine direkte Anwendung ist

Satz 12.13 : (Grenzwertkriterium)

Seien $\mathbb{R} \ni a < b \leq \infty$, f, g seien
aus $\mathcal{R}([a, \tilde{b}])$ für alle $\tilde{b} < b$.

Es gelte:

1.) $g > 0$,

2.) $\lim_{x \uparrow b} \frac{f(x)}{g(x)}$ existiert,

3.) $\int_a^b g(x) dx$ $-||-$.

Dann existiert auch $\int_a^b f(x) dx$,
und das Integral konvergiert absolut.

(analog für andere Grenzübergänge)

Beweis: Sei $\alpha := \lim_{x \uparrow b} \frac{f(x)}{g(x)} \implies$

$$\exists a' \in [a, b): \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \alpha \right| \leq 1 \quad \forall x \gg a', \quad x < b$$

$$\Rightarrow |\varphi(x) - \alpha g(x)| \leq g(x) \dots\dots\dots$$

$$\Rightarrow |\varphi(x)| \leq (1+\alpha) g(x) \dots\dots\dots$$

Jetzt kann man 12.11 benutzen. $\square$

← als Fortsetzung von n !

Beispiel: Die Gamma-Funktion

$$\Gamma(n) := \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \quad \leftarrow \begin{cases} \text{uneigentlich} \\ \text{bei } 0 \text{ und} \\ \infty \end{cases}$$

ist wohldefiniert für alle $n > 0$.

fixiere $n > 0 \Rightarrow$

1.) $x \in (0, 1]$:

$$x^{n-1} e^{-x} \leq x^{n-1}, \quad \int_0^1 x^{n-1} dx$$

existiert $\xRightarrow{12.11} \int_0^1 x^{n-1} e^{-x} dx$ existiert;

2.) $x \in [1, \infty)$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\rho-1} \cdot e^{-x}}{e^{-x/2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\rho-1} \cdot e^{-x/2} = 0,$$

$\int_1^{\infty} e^{-x/2} dx$ existiert (Transformation $x = 2y$)

$$= 2 \int_{1/2}^{\infty} e^{-y} dy = 2(-e^{-y}) \Big|_{1/2}^{\infty}$$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} x^{\rho-1} e^{-x} dx \text{ existiert}$$

Aus 1.) + 2.) folgt die Beh. $\square$

Man kann zeigen:

$$\Gamma(\rho+1) = \rho \Gamma(\rho), \quad \rho > 0$$

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(n) = (n-1)!, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Satz 12.13: (Uneigentliche Integrale und Reihen)

Sei $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ monoton fallend
und ≥ 0 . Dann existiert

$$\rho := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} f(x) dx \right)$$

und erfüllt: $0 \leq \rho \leq f(1)$.

Man sieht:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ konvergent} \iff \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ existiert.}$$

Beweis: Es gilt $f(k) \geq f(k+1)$ (wegen Monotonie)

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq f(k+1) \quad (*)_k$$

$$\text{Sei } a_n := \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} f(x) dx \implies$$

$$a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f(x) dx \geq 0 \quad (*)_{n+1}$$

$\Rightarrow (a_n)$ wächst monoton und $a_n \geq 0$,

denn $a_1 = f(1) - \int_1^2 f(x) dx \underset{(*)}{\geq} 0$.

Außerdem: $a_n \leq f(1) - f(n+1)$ **(**)**

denn:
$$a_n = f(1) + \sum_{k=2}^{n+1} f(k) - \int_1^{n+1} f(x) dx - f(n+1)$$

$$= f(1) - f(n+1) + \sum_{k=2}^{n+1} f(k) - \int_1^{n+1} f(x) dx$$

$$= f(1) - f(n+1) + \sum_{k=2}^{n+1} \underbrace{\left(f(k) - \int_{k-1}^k f(x) dx \right)}_{\leq 0 \text{ nach } (*)_{k-1}}$$

Also gilt **(**)**, und da

f monoton fällt und ≥ 0 ist, existiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n).$$

existiert wegen
monoton + beschränkt - 471-

Also: $0 \leq \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}_{=: \rho} \leq \varphi(1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) \leq \varphi(1).$ □

Anwendung : 1.) $\varphi(x) = 1/x$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right) =: c$$

existiert in $[0, 1]$. $c :=$ Euler-Konstante

Offene Frage:

$$c \in \mathbb{Q}?$$

2.) bekannt: $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\rho}}$ konvergiert genau für $\rho > 1$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\rho}} < \infty \text{ genau für } \rho > 1$$
 □